

Definizione Siano $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}$

1) Se A è illimitato superiormente, diciamo che $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO su $x \rightarrow +\infty$ al grafico della funzione f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

2) Se A è illimitato inferiormente, diciamo che $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO su $x \rightarrow -\infty$ al grafico della funzione f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

Osservazione Come stabiliamo se f ammette un asintoto obliquo su $x \rightarrow +\infty$?

Ovviamente se f ha un asintoto orizzontale su $x \rightarrow +\infty$, allora f non può avere un asintoto obliquo su $x \rightarrow +\infty$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \{\pm\infty\}$ e

$$\textcircled{1} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\textcircled{2} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo su $x \rightarrow +\infty$. Analogamente su $x \rightarrow -\infty$

Studi di funzione

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$\text{C.E. } x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \quad f \text{ è una funzione dispari}$$

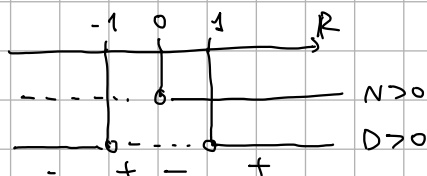
$$\text{zeri di } f: f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

studio del segno di f :

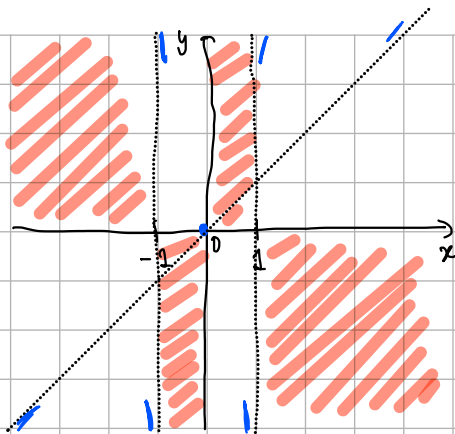
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 - 1} > 0$$

$$N > 0: x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$D > 0: x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$$

verifichiamo se f ammette asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, ma anche per $x \rightarrow -\infty$ (per simmetria)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \text{per simmetria}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \text{per simmetria}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$x = \pm 1$ sono asintoti verticali

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3 \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{dom}(f) = \text{dom}(f')$$

$$\text{punti stazionari: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2-3) = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

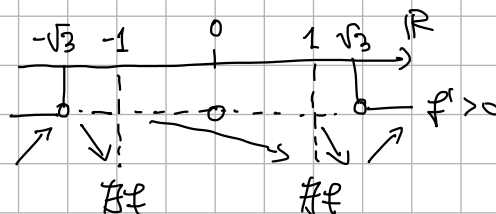
studio del segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2-3) > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \wedge x^2-3 > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

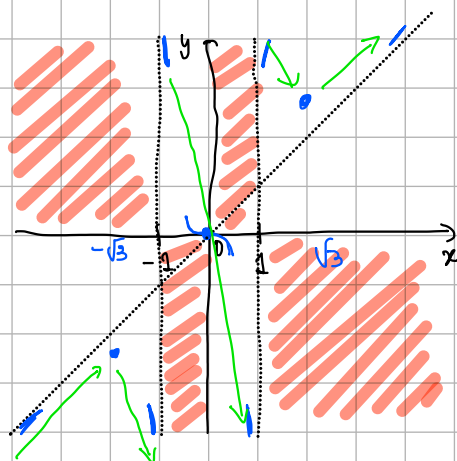
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \wedge (x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$



f è strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$

f è strettamente decrescente in $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$



$x = -\sqrt{3}$ punto di max rel.

$x = \sqrt{3}$ punto di min rel.

$x = 0$ punto di flesso e tangente orizzontale

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{2x(2x^2 - 3)(x^2 - 1)^2 - 4x^3(x^2 - 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(2x^2 - 3)(x^2 - 1) - 4x^3(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$$= \frac{2x[(2x^2 - 3)(x^2 - 1) - 2x^2(x^2 - 3)]}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

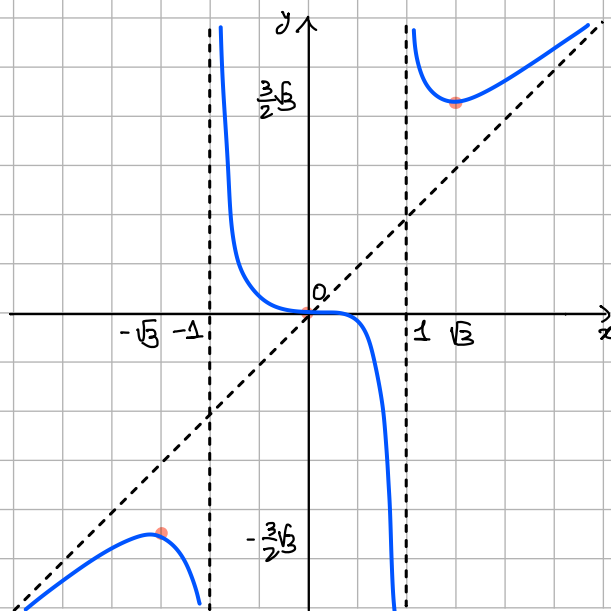
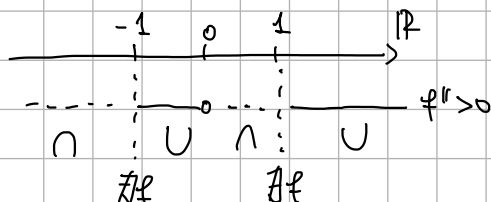
$$\text{dom}(f'') = \text{dom}(f)$$

punti di flesso

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x^2 + 3) = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

studio del segno di f''

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2 - 1)^3} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$



② $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

C.E. $x \neq 0$

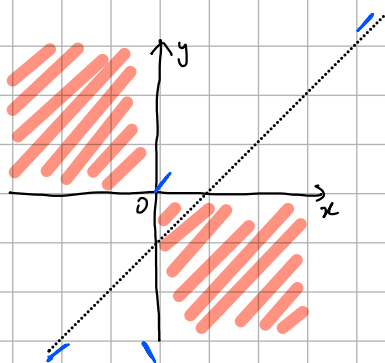
$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

f non è né pari né dispari

zeri di f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 f non ha zeri
 non accettabile

studio del segno di f :

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$

perché

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t = 1$

verifichiamo se f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x (e^{-\frac{1}{x}} - 1) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{1}{t} (e^t - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{e^t - 1}{t} = -1$
 $\uparrow$
 $t = -\frac{1}{x}$
 se $x \rightarrow -\infty$ allora $t \rightarrow 0^+$

$y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t} e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{e^t}{t} = -\infty$
 $\uparrow$
 $t = -\frac{1}{x}$
 se $x \rightarrow 0^-$ allora $t \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

$y = x - 1$ è asintoto obliquo anche per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$$

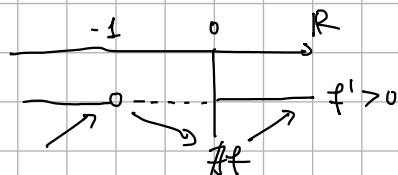
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$\text{dom}(f') = \text{dom}(f)$$

Punti stazionari: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

studio del segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$$

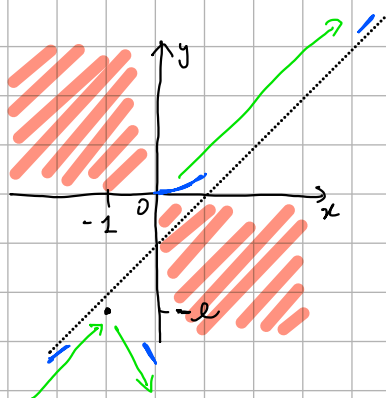


f strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(0, +\infty)$

f strettamente decrescente in $(-1, 0)$

$x = -1$ punto di massimo relativo

$$f(-1) = (-1) e^{-\frac{1}{-1}} = -e$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0^+ \end{aligned}$$

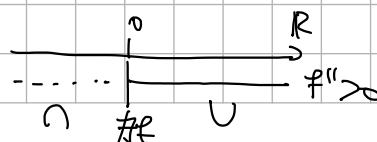
$$f'(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

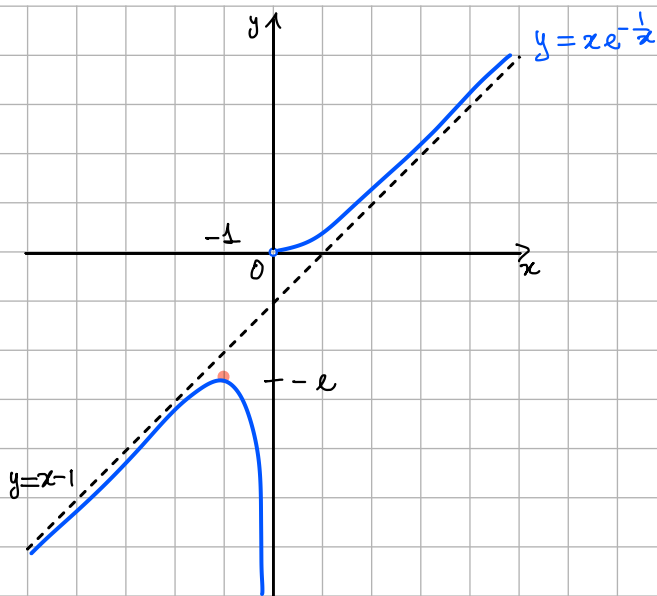
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \left(-1 + \frac{x+1}{x} \right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

non ci sono punti di flesso ($f''(x) = 0$ non ha soluzioni)

studio del segno di f''

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

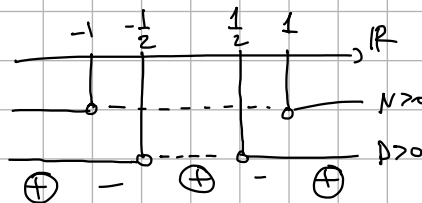




$$f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right)$

C.E. $\frac{x^2-1}{4x^2-1} > 0$
 $N > 0$: $x < -1 \vee x > 1$
 $D > 0$: $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$



$\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$
 f è una funzione pari ($f(x) = f(-x)$)

zeri di f :

$$\ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{4x^2-1} = 1 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

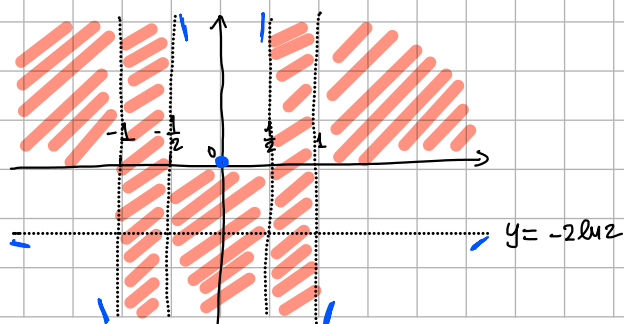
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

studio del segno di f

$$\ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right) > 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{4x^2-1} > 1 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2}{4x^2-1} < 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2-1 < 0 \wedge x \neq 0) \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{4}} \ln t = \ln \frac{1}{4} = -2 \ln 2 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \ln 2$$

$y = -2 \ln 2$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$x = -1$ è asintoto verticale sinistro

$x = -\frac{1}{2}$ è asintoto verticale destro

$x = 1$ è asintoto verticale destro

$x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale sinistro

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{4x^2-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{4x^2-1}} \cdot \frac{2x(4x^2-1) - (x^2-1)8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{1}{(x^2-1)(4x^2-1)} 2x [4x^2-1 - 4x^2+4]$$

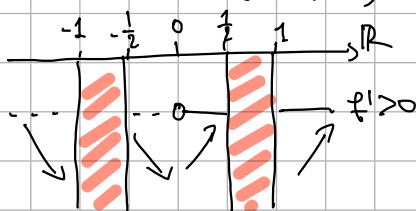
$$= \frac{6x}{(x^2-1)(4x^2-1)} \quad \text{dom}(f') = \text{dom}(f)$$

punti stazionari

$$f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 6x = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

studio del segno di f' :

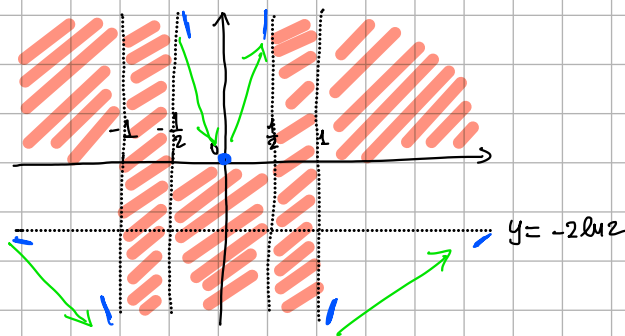
$$f'(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{6x}{(x^2-1)(4x^2-1)} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 6x > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$



f è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-\frac{1}{2}, 0)$

f è strettamente crescente in $(0, \frac{1}{2})$ e in $(1, +\infty)$

$x = 0$ è punto di minimo relativo $f(0) = 0$



BONUS: Calcoliamo f'' e studiamo gli intervalli di convessità / concavità

$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2-1)(4x^2-1)}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6 \frac{(x^2-1)(4x^2-1) - x \cdot [2x(4x^2-1) + (x^2-1)8x]}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} \\ &= 6 \frac{(x^2-1)(4x^2-1) - 2x^2[4x^2-1 + 4x^2-4]}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} \\ &= 6 \frac{(x^2-1)(4x^2-1) - 2x^2(8x^2-5)}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} = \frac{6}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} [4x^4 - 5x^2 + 1 - 16x^4 + 10x^2] \\ &= \frac{6[-12x^4 + 5x^2 + 1]}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{dom}(f'') = \text{dom}(f)$$

eventuali punti di flesso

$$f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} -12x^4 + 5x^2 + 1 = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

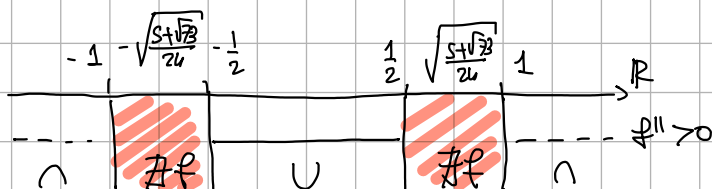
$$\begin{aligned} -12x^4 + 5x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{-24} \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{24} \vee x^2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{24} \\ \Delta = 25 + 48 = 73 & \quad \text{impossibile} \\ (\Leftrightarrow) \quad x &= \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{24}} \end{aligned}$$

perché $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{24}} \in (\frac{1}{2}, 1)$ queste soluzioni dell'equazione biquadratica $-12x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ non appartengono al dominio di f e quindi NON sono punti di flesso

studio del segno di f''

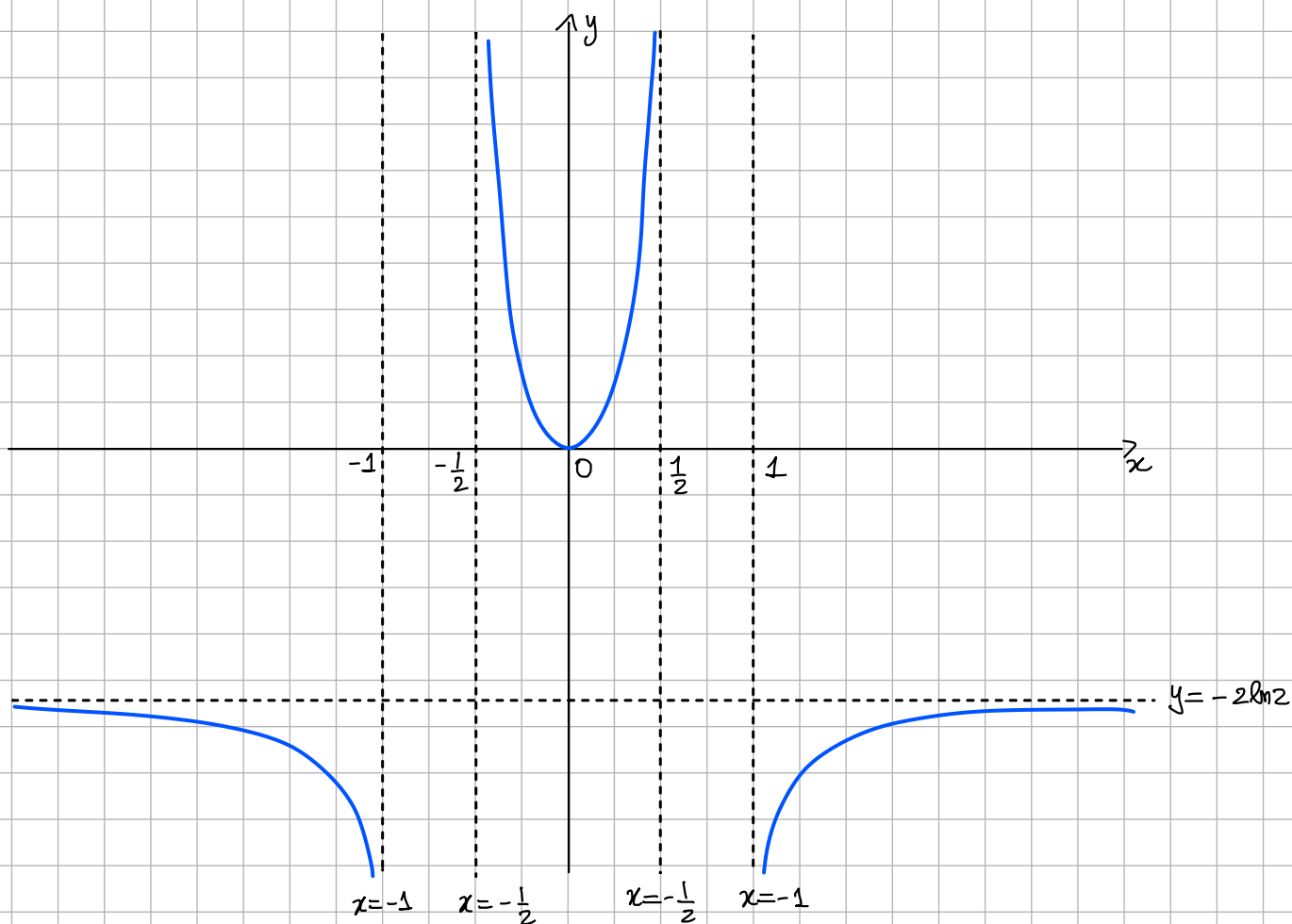
$$f''(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{6[-12x^4 + 5x^2 + 1]}{(x^2-1)^2(4x^2-1)^2} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 12x^4 - 5x^2 - 1 < 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\Leftrightarrow) \quad &\begin{cases} \frac{5 - \sqrt{33}}{24} < x^2 < \frac{5 + \sqrt{33}}{24} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \text{sempre vera} \\ (\Leftrightarrow) \quad &\begin{cases} -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{24}} < x < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{24}} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \end{aligned}$$



f convessa in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

f concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$



$$f\left((-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)\right) = (-\infty, -2 \ln 2) \cup [0, +\infty)$$

Mi precisamenti

$$f((-\infty, -1)) = f((1, +\infty)) = (-\infty, -2 \ln 2)$$

$$f\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$$

① $f(x) = x \sqrt{4 - x^2}$

c.e. $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$\text{dom}(f) = [-2, 2]$$

f è una funzione dispari

zeri di f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee 4 - x^2 = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm 2 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$

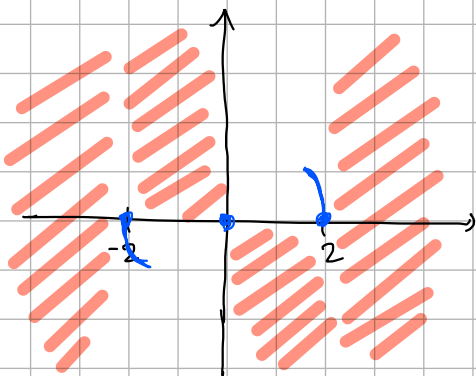
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$$

studio del segno f :

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqrt{4 - x^2} > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge (x \neq \pm 2) \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$

è sempre > 0 ad eccezione dei punti ± 2 dove si annulla

$$\Leftrightarrow x \in (0, 2)$$



$$f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{dom}(f') = \text{dom}(f) \setminus \{\pm 2\} = (-2, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \quad x = \pm 2 \text{ punti a tangenti verticali}$$

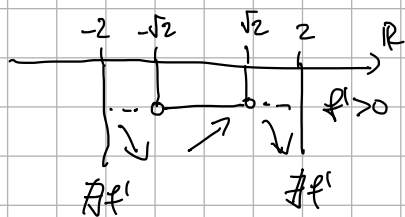
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\infty$$

punti stazionari

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 = 0 \\ x \in \text{dom}(f') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x \in \text{dom}(f') \end{cases}$$

studio del segno di f'

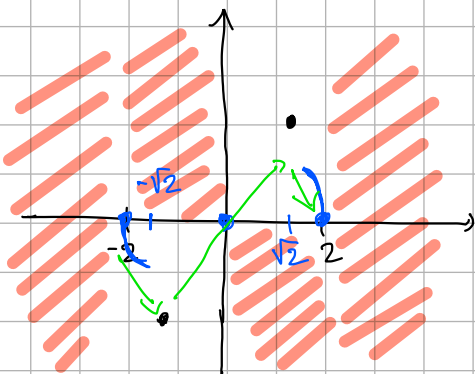
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 > 0 \\ x \in \text{dom}(f') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x \in \text{dom}(f') \end{cases}$$



$x = -\sqrt{2}$ punto di minimo relativo
 $x = \sqrt{2}$ punto di massimo relativo

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = 2$$

$$f(-\sqrt{2}) = -2$$



BONUS: calcoliamo f'' e determiniamo gli intervalli di concavità / convessità

Osserviamo da ambo i sensi calcolare f'' , sappiamo che $f''(0) = 0$ poiché f dispari $\Rightarrow f'$ pari $\Rightarrow f''$ dispari $\Rightarrow f''(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 2(2-x^2)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \left[-2x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} + (2-x^2)\left(-\frac{1}{2}\right)(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \right] \\ &= 2 \left[-2x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} + (2-x^2)x(4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &= 2x(4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \left[-2(4-x^2) + (2-x^2) \right] \\ &= 2x(4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \left[-8 + 2x^2 + 2 - x^2 \right] = 2x(4-x^2)^{-\frac{3}{2}} (x^2 - 6) \\ &= \frac{2x(x^2 - 6)}{(\sqrt{4-x^2})^3} \end{aligned}$$

$$\text{dom}(f'') = \text{dom}(f') = (-2, 2)$$

eventuali punti di flesso

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x^2 - 6) = 0 \\ x \in \text{dom}(f'') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x^2 - 6 = 0 \\ x \in \text{dom}(f') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm\sqrt{6} \\ x \in (-2, 2) \end{cases} \begin{matrix} \text{non accettabili} \\ \end{matrix} \Leftrightarrow x = 0$$

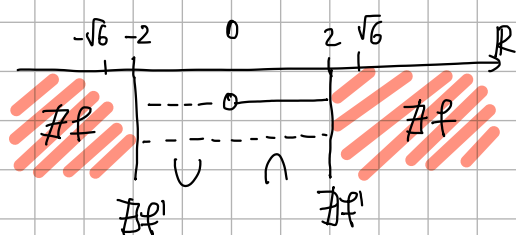
Studio del segno di f''

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 - 6)}{(\sqrt{4-x^2})^3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x^2 - 6) > 0 \\ x \in \text{dom}(f'') \end{cases}$$

$\uparrow$
 nel dominio di f''
 il denominatore è sempre > 0

$$1f > 0 : 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$2f > 0 : x^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6}$$



f convessa in $(-2, 0)$

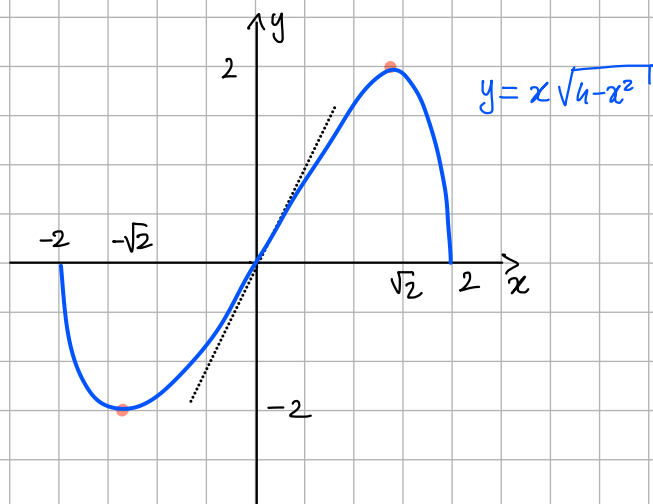
f concava in $(0, 2)$

$x = 0$ punto di flesso (discontinuo)

possiamo calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto di flesso $(0, 0)$

$$y = f(0) + f'(0) \cdot x = 2x$$

$\uparrow$
 $f(0) = 0$
 $f'(0) = 2$



$$f([-2, 2]) = [-2, 2]$$

$x = \sqrt{2}$ punto di massimo assoluto

$x = -\sqrt{2}$ punto di minimo assoluto

Osservazioni: f è una funzione definita sull'intervallo chiuso e limitato
 f è continua in $[-2, 2]$, derivabile in $(-2, 2)$ e $f(-2) = 0 = f(2)$

Teorema di Weierstrass $\Rightarrow \exists$ punti di max e min assoluto

Teorema di Rolle $\Rightarrow \exists$ punto di estremo relativo intorno al dominio

facendo i calcoli abbiamo trovato esattamente quanto previsto dai teoremi di Weierstrass e Rolle.